**统计信号处理基础 第08次作业**

许凌玮 2018011084

**1. 标量卡尔曼滤波**

对于标量的卡尔曼滤波，状态量为标量，观测量为标量，已知

其中、均为零均值的白噪声序列，，，，，，，。

状态量的估计公式写为

求解、使得最小。

**【解答】**

状态量的估计公式为

为使达到最小，令

则由得

利用展开、两式得

对于式左边，有（最后一步用到了式）

对于式右边，有

其中（最后一步用到了式）

因此

比较、两式得

将式带回式，整理得状态量估计的递推表达式

定义“新息”为测量残差

此时

则

其中

则

对其最小化

解得

以及

将式代入式，解得

将式中的下标换成，代入式可得题目所要求的最优卡尔曼增益的递推式

**【注1】**下面重新整理**标量卡尔曼滤波过程**如下。

卡尔曼滤波器的状态由以下两个量表征：

：在时刻的状态的估计

：后验估计误差协方差矩阵，度量估计值的精确程度

卡尔曼滤波的操作包括两个阶段：预测与更新。

**I. 预测阶段**（依据状态方程与观测方程，由时刻的最优状态估计去预测时刻的状态）

预测状态：

预测估计协方差：

**II. 更新阶段**（由时刻的观测去修正前面作出的预测）

首先计算以下各量。

测量残差：

测量残差的协方差：

最优卡尔曼增益：

然后用它们来更新滤波器状态变量。

更新的状态估计：

更新的协方差估计：

**【注2】**类似地，**矢量卡尔曼滤波**过程如下。

状态量为矢量，状态转移矩阵为，状态转移噪声为；观测量为矢量，观测矩阵为，观测噪声为。已知

其中

卡尔曼滤波器的状态由以下两个量表征：

：在时刻的状态的估计

：后验估计误差协方差矩阵，度量估计值的精确程度

卡尔曼滤波的操作包括两个阶段：预测与更新。

**I. 预测阶段**（依据状态方程与观测方程，由时刻的最优状态估计去预测时刻的状态）

预测状态：

预测估计协方差矩阵：

**II. 更新阶段**（由时刻的观测去修正前面作出的预测）

首先计算以下各量。

测量残差：

测量残差的协方差矩阵：

最优卡尔曼增益：

然后用它们来更新滤波器状态变量。

更新的状态估计：

更新的协方差矩阵估计：

基于此，我们还可以推得扩展卡尔曼滤波（）、无迹卡尔曼滤波（）、自适应卡尔曼滤波（）等。

**2. 矢量卡尔曼滤波建模**

设平面上有一点目标作匀加速直线运动，对状态方程与观测方程进行建模。

**【解答】**

设点目标在二维空间中的坐标为，到时刻的时间间隔为，则匀加速直线运动的建模为

其中、为零均值的状态转移白噪声，附加在期望为常量的加速度上。

记状态量为，则系统方程为

仅观测物体的空间位置，记观测量为，则观测方程为

其中、为观测噪声。

下面用矢量与矩阵的形式来表示以上方程，记状态转移矩阵与观测矩阵分别为

状态转移噪声与观测噪声分别记为

其协方差矩阵分别为

综上可得该情境下的矢量卡尔曼滤波模型

其中独立噪声满足

各量含义见前述表达式。

**注：**对于三维空间中的匀加速直线运动，只需与、类似地加上坐标分量，各方程扩维，形式基本不变。